Ludwig-Maximilians-Universität München WS 2005/2006
Institut für Informatik Blatt 1
Prof. Dr. F. Kröger, Dr. M. Hölzl, F. Hacklinger

Übungen zu Informatik I (Lösungsvorschlag)

Aufgabe 1-1 **Wechselgeld** (keine Abgabe)

Wir definieren einen Typ **change**, der die fünf möglichen Ergebnisse als Datenelemente enthält:

$$\textbf{change} = \{[], [1], [2], [1,2], [2,2]\}$$

Dabei bedeutet ein Rückgabewert [1], dass der Automat ein 1-Euro-Stück zurückgibt, [1, 2] bedeutet, dass der Automat ein 1-Euro- und ein 2-Euro-Stück zurückgibt, [] bedeutet, dass der Automat kein Wechselgeld zurückgibt. Der Algorithmus ergibt sich dann als einfache Fallunterscheidung:

W = **function** (preis : **nat**) **change** :
  result Wechselgeld, das der Automat üzurckgibt
  pre $1 \leq$ preis ≤ 5
  if preis $= 5$ **then** []
  else if preis $= 4$ **then** [1]
  else if preis $= 3$ **then** [2]
  else if preis $= 2$ **then** [1, 2]
  else if preis $= 1$ **then** [2, 2]

Aufgabe 1-2 **Einkommensteuerberechnung** (keine Abgabe)

In Pseudocode erhält man folgende Realisierung:

steuer = **function** (x : **real**) **nat** :
  result Tarifliche Einkommensteuer 2005
  let $x' = \lfloor x \rfloor$
  in if $x' \leq 7\,664$ **then**
    0
   else if $x' \leq 12\,739$ **then**
    let y $= (x' - 7664)/10\,000$
    in $\lfloor (883.74 \cdot y + 1\,500) \cdot y \rfloor$
   else if $x' \leq 52\,151$ **then**
    let z $= (x' - 12\,739)/10\,000$
    in $\lfloor (228.74 \cdot z + 2\,397) \cdot z + 989 \rfloor$
   else
    $\lfloor 0.42 \cdot x - 7\,914 \rfloor$
   end

Hinweise:

- Wir nehmen bei der angegebenen Realisierung an, dass Berechnungen mit **real**-Daten exakt sind. In den meisten Programmiersprachen bezeichnet der Datentyp **real** Gleitkommazahlen in Binärdarstellung. Da bei der Rechnung mit diesem Datentyp Rundungsfehler auftreten, ist er nicht zur Rechnung mit Geldbeträgen geeignet.

- In der angegebenen Realisierung werden arithmetische Operationen auf Kombinationen aus Argumenten vom Typ **nat** und **real** angewandt. Bei der Implementierung in SML müssen bei diesen Berechnungen Typumwandlungen zwischen **real** und **int** eingefügt werden.

Aufgabe 1-3 **Implikation** (keine Abgabe)

a) Für die ersten beiden Gesetze erhalten wir folgende Wahrheitstabelle:

x	y	$\neg x$	$\neg y$	$x \wedge y$	$x \implies y$	$\neg x \vee y$	$\neg x \vee \neg y$	$\neg(x \wedge y)$
wahr	*wahr*	*falsch*	*falsch*	*wahr*	*wahr*	*wahr*	*falsch*	*falsch*
wahr	*falsch*	*falsch*	*wahr*	*falsch*	*falsch*	*falsch*	*wahr*	*wahr*
falsch	*wahr*	*wahr*	*falsch*	*falsch*	*wahr*	*wahr*	*wahr*	*wahr*
falsch	*falsch*	*wahr*	*wahr*	*falsch*	*wahr*	*wahr*	*wahr*	*wahr*

Für das dritte Gesetz ergibt sich

x	y	z	$x \vee y$	$y \vee z$	$x \vee (y \vee z)$	$(x \vee y) \vee z$
wahr	*wahr*	*wahr*	*wahr*	*wahr*	*wahr*	*wahr*
wahr	*wahr*	*falsch*	*wahr*	*wahr*	*wahr*	*wahr*
wahr	*falsch*	*wahr*	*wahr*	*wahr*	*wahr*	*wahr*
wahr	*falsch*	*falsch*	*wahr*	*falsch*	*wahr*	*wahr*
falsch	*wahr*	*wahr*	*wahr*	*wahr*	*wahr*	*wahr*
falsch	*wahr*	*falsch*	*wahr*	*wahr*	*wahr*	*wahr*
falsch	*falsch*	*wahr*	*falsch*	*wahr*	*wahr*	*wahr*
falsch	*falsch*	*falsch*	*falsch*	*falsch*	*falsch*	*falsch*

b) Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
x \implies (y \implies z) &= \neg x \vee (y \implies z) && \text{(Teilaufgabe (a1))}\\
&= \neg x \vee (\neg y \vee z) && \text{(Teilaufgabe (a1))}\\
&= (\neg x \vee \neg y) \vee z && \text{(Teilaufgabe (a3))}\\
&= \neg(x \wedge y) \vee z && \text{(Teilaufgabe (a2))}\\
&= (x \wedge y) \implies z && \text{(Teilaufgabe (a1))}
\end{aligned}
$$

Außerdem:

$$
\begin{aligned}
&(x \implies y \wedge y \implies z) \implies (x \implies z) =\\
&\quad = ((\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z)) \implies (x \implies z)\\
&\quad = \neg((\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z)) \vee (x \implies z)\\
&\quad = (\neg(\neg x \vee y) \vee \neg(\neg y \vee z)) \vee (x \implies z)\\
&\quad = ((\neg\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg\neg y \wedge \neg z)) \vee (x \implies z)\\
&\quad = ((x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg z)) \vee (x \implies z)\\
&\quad = ((x \vee (y \wedge \neg z)) \wedge (\neg y \vee (y \wedge \neg z))) \vee (x \implies z)\\
&\quad = (((x \vee y) \wedge (x \vee \neg z)) \wedge ((\neg y \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg z))) \vee (x \implies z)\\
&\quad = (((x \vee y) \wedge (x \vee \neg z)) \wedge (\neg y \vee \neg z)) \vee (x \implies z)\\
&\quad = (((x \vee y) \wedge (x \vee \neg z)) \wedge (\neg y \vee \neg z)) \vee (\neg x \vee z)\\
&\quad = \big(((x \vee y) \wedge (x \vee \neg z)) \vee (\neg x \vee z)\big) \wedge \big((\neg y \vee \neg z) \vee (\neg x \vee z)\big)\\
&\quad = \big(((x \vee y) \wedge (x \vee \neg z)) \vee (\neg x \vee z)\big) \wedge \big((\neg y \vee \neg x) \vee (\neg z \vee z)\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \big(((x \vee y) \wedge (x \vee \neg z)) \vee (\neg x \vee z)\big) \wedge \mathit{wahr} \\
&= ((x \vee y) \wedge (x \vee \neg z)) \vee (\neg x \vee z) \\
&= ((x \vee y) \vee (\neg x \vee z)) \wedge ((x \vee \neg z) \vee (\neg x \vee z)) \\
&= ((x \vee \neg x) \vee (y \vee z)) \wedge ((x \vee \neg x) \vee (\neg z \vee z)) \\
&= (\mathit{wahr} \vee (y \vee z)) \wedge (\mathit{wahr} \vee \mathit{wahr}) \\
&= \mathit{wahr} \wedge \mathit{wahr} \\
&= \mathit{wahr}
\end{aligned}
$$

c) Wir definieren die folgenden Bedingungen:

- L: Albert ist ein Lügner
- B: Berta war im Januar in Berlin

Dann lässt sich der Text folgendermaßen formalisieren:

- Albert ist ein Lügner oder Berta war im Januar in Berlin: $L \vee B$
- Falls Berta im Januar nicht in Berlin war, so sagt Albert die Wahrheit: $\neg B \implies \neg L$
- [...] Berta [muss] im Januar in Berlin gewesen sein: B

Insgesamt ergibt sich also:

$$\big((L \vee B) \wedge (\neg B \implies \neg L)\big) \implies B$$

Durch Umformen erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&\big((L \vee B) \wedge (\neg B \implies \neg L)\big) \implies B \\
&\qquad = \big((L \vee B) \wedge (\neg\neg B \vee \neg L)\big) \implies B && \text{(1-3 a1)} \\
&\qquad = \big((L \vee B) \wedge (B \vee \neg L)\big) \implies B && \text{(1-6 a6)} \\
&\qquad = \big((L \wedge (B \vee \neg L)) \vee (B \wedge (B \vee \neg L))\big) \implies B && \text{(*)} \\
&\qquad = \big(((L \wedge B) \vee (L \wedge \neg L)) \vee ((B \wedge B) \vee (B \wedge \neg L))\big) \implies B && \text{(*)} \\
&\qquad = \big((L \wedge B) \vee (B \vee (B \wedge \neg L))\big) \implies B && \text{(**)} \\
&\qquad = \big((L \wedge B) \vee B\big) \implies B && \text{(***)} \\
&\qquad = B \implies B && \text{(***)} \\
&\qquad = \neg B \vee B && \text{(1-3 a1)} \\
&\qquad = \mathit{wahr} && \text{(****)}
\end{aligned}
$$

Die folgenden Gesetze werden ohne Beweis verwendet.

- * Duale Form von (1-6 a8)
- ** $x \wedge \neg x = \mathit{falsch}$, $x \vee \mathit{falsch} = x$.
- *** $x \wedge x = x$, $x \vee (x \wedge y) = x$.
- **** $x \vee \neg x = \mathit{wahr}$

Bei dieser Form der Formalisierung entstehen einige bedeutende Diskrepanzen zwischen dem Modell und der Wirklichkeit:

1. In der Formalisierung ist die Negation von “Albert ist ein Lügner” die Aussage “Albert sagt die Wahrheit”. Das würde die Wirklichkeit nur dann widerspiegeln, wenn ein Lügner *niemals* die Wahrheit sagen würde.
2. In der Formalisierung wird nicht zwischen verschiedenen Modalitäten (wie “war in Berlin” und “muss in Berlin gewesen sein”) unterschieden. Allerdings ist dieser Unterschied im Beispiel unerheblich.

Wenn derart große Abweichungen zwischen den Begriffen in einer Formalisierung auftauchen wie in 1. erhält man im Modell möglicherweise Aussagen, die in der modellierten Wirklichkeit nicht gültig sind (siehe auch Aufgabe 1-6 c).