Übungen zu Informatik I

Aufgabe 6-1 **Termauswertung** (keine Abgabe)

Zeigen Sie, dass folgende Aussage für beliebige Umgebungen U gilt:

$$W^U(\textbf{let val } x = 3 \textbf{ in } x\ +1 \textbf{ end}) = W^U(\textbf{let val } y = 3 \textbf{ in } y\ +1 \textbf{ end}).$$

Aufgabe 6-2 **Auswertung eines Funktionsaufrufs** (keine Abgabe)

Gegeben sei folgende SML-Funktion:

```
fun foo(n,m) =
    if n=m then 1
    else 2 + 3 * foo(n+1,m-1);
```

Werten Sie den Funktionsaufruf $foo(1,5)$ in der Umgebung $U = \{\langle foo, foo^{sem}\rangle\}$ aus.

Aufgabe 6-3 **Berechnung des Differenzenquotienten** (keine Abgabe)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine an der Stelle x differenzierbare Funktion. Der Differenzenquotient der Funktion f an der Stelle x ist:

$$\frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}$$

a) Schreiben Sie ein SML-Programm *diff*, das als Parameter eine Funktion f sowie die Zahlen x und Δ hat. Das Ergebnis der Funktion soll der nach obiger Formel berechnete Wert des Differenzenquotienten sein.

b) Schreiben Sie ein SML-Programm *quadrat*, das als Parameter eine reelle Zahl hat und das Quadrat der Zahl berechnet. Werten Sie den Aufruf $diff(quadrat, 1.0, 0.001)$ mit Ihrem SML-System aus.

Aufgabe 6-4 **Streichholzspiel** (4 Punkte)

Beim Streichholzspiel treten zwei Spieler gegeneinander an. Vor den Spielern liegt eine Reihe von $n \geq 1$ Streichhölzern. Weiter sei ein natürliche Zahl k mit $1 \leq k \leq n$ festgelegt. Die Spieler entfernen fortwährend abwechselnd eine beliebige Anzahl von j Streichhölzern ($1 \leq j \leq k$). Der Spieler der das letzte Hölzchen entfernen muss, hat das Spiel verloren.

Spielen beide Spieler optimal, so ist durch die Zahlen n und k bereits zu Beginn des Spiels festgelegt, ob der erste oder der zweite Spieler das Spiel gewinnt. Es gibt für jedes k bestimmte Anzahlen von Streichhölzern (Verliererzahlen), die, sobald sie ein Spieler zu Beginn seines Zuges vorfindet, festlegen, dass er von seinem Gegner durch geschicktes Spiel gezwungen werden kann, (nach beliebig vielen Zügen) das letzte Hölzchen zu nehmen und damit das Spiel zu verlieren.

a) Überlegen Sie sich, welche Zahlen die Verliererzahlen sind, und beschreiben Sie diese formal in Abhängigkeit der Zahl k.

b) Schreiben Sie ein SML-Programm *verliererzahl*, das für zwei Parameter m und k (mit $1 \leq k \leq m$) berechnet, ob m eine Verliererzahl für k ist.

c) Schreiben Sie zwei verschränkt rekursive Funktionen *anton* und *berta*, die zwei Spieler realisieren sollen. Dabei ruft der eine Spieler den anderen auf und übergibt ihm die Zahl der übrig gebliebenen Streichhölzer sowie den Wert k. Diejenige Funktion, die das letzte Streichholz entfernt und das Spiel verliert, gibt ihren Namen als Ergebnis zurück.

Aufgabe 6-5 **Termauswertung** (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (jeweils für beliebige Umgebungen U)? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $W^U(\textbf{if } b \textbf{ then } true \textbf{ else } false) = W^U(b)$

b) $W^U(\textbf{if } b \textbf{ then } t_1 \textbf{ else } t_2) = W^U(\textbf{if not } b \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } t_1)$

c) $W^U(t_1 \textbf{ andalso } t_2) = W^U(t_2 \textbf{ andalso } t_1)$

d) $W^U(t_1 \textbf{ andalso } t_2) = W^U(\textbf{not}(\textbf{not } t_1 \textbf{ orelse not } t_2))$

Aufgabe 6-6 **Integration mit der Sehnentrapezformel** (4 Punkte)

Ein einfaches Verfahren zur Abschätzung des Integrals einer stetigen Funktion f im Intervall $[a, b]$ bildet die sogenannte Sehnentrapezregel: Dabei wird ein Trapez mit den Eckpunkten $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ gebildet. Die Strecke zwischen den Punkten $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ approximiert dabei den Verlauf der Funktion; die Fläche des Trapezes ist somit ein Näherungswert für das Integral.

a) Schreiben Sie ein SML-Programm *trapez_einfach*, das als Parameter eine beliebige (im Intervall $[a, b]$ als stetig angenommene) Funktion f, zwei Zahlen a und b (mit $a < b$ und $a, b \in \mathbb{R}$) hat und als Ergebnis das mit der Sehnentrapezformel angenäherte Integral von f zwischen a und b berechnet.

b) Die Abschätzung kann verbessert werden, indem das Intervall $[a, b]$ in weitere Intervalle zerlegt wird und man auf diese die Sehnentrapezformel anwendet. Schreiben Sie ein SML-Programm *integral*, das als Parameter ebenso wie in Teilaufgabe a) Parameter f, a und b und zusätzlich einen Parameter n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) hat, der angibt, in wieviele gleichgroße Intervalle das Intervall $[a, b]$ aufgeteilt werden soll. Das Ergebnis der Funktion ist die Summe aller mit der Sehnentrapezregel abgeschätzen Integrale von f in den Teilintervallen.

Abgabe: Montag, 12.12.2005, 8:00 Uhr.