Ludwig-Maximilians-Universität München WS 2005/2006
Institut für Informatik Blatt 6
Prof. Dr. F. Kröger, Dr. M. Hölzl, F. Hacklinger

Übungen zu Informatik I (Lösungsvorschlag)

Aufgabe 6-1 Termauswertung

Nach der Auswertungsregel (7):

$W^U(\textbf{let val } x = 3 \textbf{ in } x{+}1 \textbf{ end}) = W^{U\cup\{\langle x,3\rangle\}}(x{+}1) = W^{U\cup\{\langle x,3\rangle\}}(x){+}W^{U\cup\{\langle x,3\rangle\}}(1) = 3{+}1 = 4$

$W^U(\textbf{let val } y = 3 \textbf{ in } y{+}1 \textbf{ end}) = W^{U\cup\{\langle y,3\rangle\}}(y{+}1) = W^{U\cup\{\langle y,3\rangle\}}(y){+}W^{U\cup\{\langle y,3\rangle\}}(1) = 3{+}1 = 4$

also: $W^U(\textbf{let val } x = 3 \textbf{ in } x + 1 \textbf{ end}) = W^U(\textbf{let val } y = 3 \textbf{ in } y + 1 \textbf{ end})$

Aufgabe 6-2 Auswertung eines Funktionsaufrufs

Sei $U = \{\langle foo, foo^{sem}\rangle\}$.

$W^U(foo(1,5)) = foo^{sem}(1,5) = W^{\{\langle n,1\rangle,\langle m,5\rangle\}\cup U}(\textbf{if } n = m \textbf{ then } 1 \textbf{ else } 2+3*foo(n+1,m-1))$ $= W^{\{\langle n,1\rangle,\langle m,5\rangle\}\cup U}(2+3*foo(2,4)) = W^{\{\langle n,1\rangle,\langle m,5\rangle\}\cup U}(2) + W^{\{\langle n,1\rangle,\langle m,5\rangle\}\cup U}(3*foo(2,4)) =$ $2+(3\cdot foo^{sem}(2,4)) = 2+(3\cdot W^{\{\langle n,2\rangle,\langle m,4\rangle\}\cup U}(\textbf{if } n = m \ \ldots)) == 2+(3\cdot W^{\{\langle n,2\rangle,\langle m,4\rangle\}\cup U}(2+$ $3*foo(n+1,m-1)) = 2+(3\cdot(W^{\{\langle n,2\rangle,\langle m,4\rangle\}\cup U}(2)+W^{\{\langle n,2\rangle,\langle m,4\rangle\}\cup U}(3*foo(3,3))) = 2+(3\cdot$ $(2+(3\cdot foo^{sem}(3,3)))) = 2+(3\cdot(2+(3\cdot W^{\{\langle n,3\rangle,\langle m,3\rangle\}\cup U}(\textbf{if } n = m \ \ldots)))) = 2+(3\cdot(2+(3\cdot$ $W^{\{\langle n,3\rangle,\langle m,3\rangle\}\cup U}(1)))) = 2+(3\cdot(2+(3\cdot 1))) = 2+(3\cdot(2+(3))) = 2+(3\cdot(5)) = 2+15 = 17$

Aufgabe 6-3 Berechnung des Differenzenquotienten

a)
```
(*a*)
fun diff(f:real -> real, x:real, delta:real):real =
    (f(x + delta) - f(x))/delta;

(*b*)
fun quadrat(x:real):real =
    x * x;

diff(quadrat, 1.0, 0.001);
```

b)
```
fun quadrat(x:real):real =
    x * x;

diff(quadrat, 1.0, 0.001);
```

Aufgabe 6-4 Streichholzspiel

a) Sobald nur noch ein Streichholz übrig ist, hat der Spieler am Zug verloren – er muss das letzte Streichholz wegnehmen. Sind noch $k+1$ Streichhölzer übrig, kann der Spieler am Zug so viele Streichhölzer wegnehmen, dass dem Gegner nur noch ein Streichholz übrig bleibt. Sind hingegen noch $(k+1)+1$ Streichhölzer übrig, ist es nicht möglich, dem Gegner das letzte Streichholz übrig zu lassen. Setzt man diesen Gedankengang fort ergibt sich die Menge der Verliererzahlen zu:

$$Verliererzahlen = \{1 + (k+1) * m \mid m \in \mathbb{N}\}$$

b) Die optimale Spielstrategie ist, den Gegner auf Verliererzahlen zu halten. D.h. bei jedem Zug genau so viele Streichhölzer wegzunehmen, dass die Anzahl der Streichhölzer, die dem Gegner übrig bleiben einer Verliererzahl entsprechen.

```
fun verliererzahl(n,k) =
    (n-1) mod (k+1) = 0
```

c)
```
fun anton(n,k) =
    if n=1 then "anton"
    else berta(n - abzuziehende(n,k), k)
and berta(n,k) =
    if n=1 then "berta"
    else anton(n - abzuziehende(n,k), k)
and abzuziehende(n,k) =
    if verliererzahl(n,k) then 1
    else (n-1) mod (k+1);
```

Aufgabe 6-5 **Termauswertung**

a) Die Aussage ist richtig, weil:

Fall 1: $W^U(b) = true$. Dann ist auch $W^U(\textbf{if } b \textbf{ then } true \textbf{ else } false) = W^U(true) = true$.

Fall 2: $W^U(b) = false$. In diesem Fall ist $W^U(\textbf{if } b \textbf{ then } true \textbf{ else } false) = W^U(false) = false$.

Fall 3: $W^U(b)$ ist undefiniert. Dann ist auch $W^U(\textbf{if } b \textbf{ then } true \textbf{ else } false)$ undefiniert.

b) Die Aussage ist richtig, weil:

Fall 1: Sei $W^U(b) = true$. Dann ist $W^U(\textbf{if } b \textbf{ then } t_1 \textbf{ else } t_2) = W^U(t_1)$ und $W^U(\textbf{if not } b \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } t_1) = W^U(t_1)$.

Fall 2: Sei $W^U(b) = false$. Dann ist $W^U(\textbf{if } b \textbf{ then } t_1 \textbf{ else } t_2) = W^U(t_2)$ und $W^U(\textbf{if not } b \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } t_1) = W^U(t_2)$.

Fall 3: Sei $W^U(b)$ undefiniert. Dann sind sowohl die linke als auch die rechte Seite der Aussage undefiniert.

c) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: sei $W^U(t_1)$ undefiniert und $W^U(t_2) = false$. $W^U(t_1 \textbf{ andalso } t_2) = W^U(\textbf{if } t_1 \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } false)$ ist undefiniert. Hingegen $W^U(t_2 \textbf{ andalso } t_1) = false$.

d) Die Aussage ist richtig:

$W^U(\textbf{not}(\textbf{not } t_1 \textbf{ orelse not } t_2)) = \neg W^U(\textbf{not } t_1 \textbf{ orelse not } t_2) = \neg W^U(\textbf{if not } t_1 \textbf{ then } true \textbf{ else not } t_2) = \neg W^U(\textbf{if } t_1 \textbf{ then not } t_2 \textbf{ else } true)$ (Umformung mit neuer Regel aus 6-5 b)

und $W^U(t_1 \textbf{ andalso } t_2) = W^U(\textbf{if } t_1 \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } false)$.

Fall 1: Sei $W^U(t_1) = true$.

$\neg W^U(\textbf{if } t_1 \textbf{ then not } t_2 \textbf{ else } true) = \neg W^U(\textbf{not } t_2) = W^U(t_2)$ und

$W^U(\textbf{if } t_1 \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } false) = W^U(t_2)$

Fall 2: Sei $W^U(t_1) = false$.

$\neg W^U(\textbf{if } t_1 \textbf{ then not } t_2 \textbf{ else } true) = \neg W^U(true) = \neg true = false$ und

$W^U(\textbf{if } t_1 \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } false) = W^U(false) = false$

Fall 3: $W^U(t_1)$ ist undefiniert. Damit sind beide Seiten undefiniert.

Aufgabe 6-6 **Integration mit der Sehnentrapezformel**

```
fun trapez_einfach (f:real -> real, a:real, b:real) =
    (b-a) * (f(a) + f(b))/2.0;

fun q2(x:real) =
    x * x;
```

```
trapez_einfach(q2, 0.0, 1.0);

fun integral (f:real->real,a,b,n:int) =
    let val h = (b-a)/real(n) in
integral_einb(f,a,h,n)
    end
and
    integral_einb(f:real->real,a,h,n:int) =
    if n=1 then trapez_einfach(f,a,a+h)
    else trapez_einfach(f,a,a+h) + integral_einb(f,a+h,h,n-1);

integral(q2, 0.0,1.0, 1000);
```