

Formale Techniken der Software-Entwicklung
Übungsblatt 6
Besprechung am 12.06.2015

Musterlösung

Die Aufgaben auf diesem Übungsblatt stammen aus dem sehr empfehlenswerten Lehrbuch [1].

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgende prädikatenlogische Formel:

$$F \equiv \neg \exists x. (\forall y. P(x, y) \vee \exists z. Q(z, y)) \vee \exists x. P(x, g(x, a)).$$

- (a) Bringen Sie die Formel F in Skolem-Normalform.

Lösung:

$$\begin{aligned} F &\equiv \neg \exists x. (\forall y. P(x, y) \vee \exists z. Q(z, y)) \vee \exists x. P(x, g(x, a)) \\ &\equiv \forall x. (\neg \forall y. P(x, y) \vee \exists z. Q(z, y)) \vee \exists x. P(x, g(x, a)) \\ &\equiv \forall x. (\exists y. \neg (P(x, y) \vee \exists z. Q(z, y))) \vee \exists x. P(x, g(x, a)) \\ &\equiv \forall x. (\exists y. (\neg P(x, y) \wedge \forall z. \neg Q(z, y))) \vee \exists x. P(x, g(x, a)) \\ &\equiv \forall x. \exists y. \forall z. (\neg P(x, y) \wedge \neg Q(z, y)) \vee \exists u. P(u, g(u, a)) \\ &\equiv \forall x. \exists y. \forall z. \exists u. (\neg P(x, y) \wedge \neg Q(z, y)) \vee P(u, g(u, a)) \\ &\equiv \forall x. \exists y. \forall z. \exists u. (\neg P(x, y) \vee P(u, g(u, a))) \wedge (\neg Q(z, y) \vee P(u, g(u, a))) \\ SNF(F) &= \forall x. \forall z. (\neg P(x, h(x)) \vee P(k(x, z), g(k(x, z), a))) \wedge \\ &\quad (\neg Q(z, h(x)) \vee P(k(x, z), g(k(x, z), a))) \end{aligned}$$

- (b) Geben Sie für die Formel F die ersten 15 Terme des Herbrand-Universums sowie die ersten sechs Formeln aus der Herbrand-Basis an.

Lösung:

$$\begin{aligned}
S &= \{\neg P(x, h(x)) \vee P(k(x, z), g(k(x, z), a)), \neg Q(z, h(x)) \vee P(k(x, z), g(k(x, z), a))\} \\
H_0 &= \{a\} \\
H_1 &= \{a, h(a), g(a, a), k(a, a)\} \\
H_2 &= H_1 \cup \{h(h(a)), h(g(a, a)), h(k(a, a)), g(h(a), a), g(g(a, a), a), g(k(a, a), a), \\
&\quad g(a, h(a)), g(h(a), h(a)), g(g(a, a), h(a)), g(k(a, a), h(a)), \\
&\quad g(a, g(a, a)), \dots\} \\
B &= \{P(a, a), Q(a, a), P(h(a), a), Q(h(a), a), P(g(a, a), a), Q(g(a, a), a), \dots\}
\end{aligned}$$

(c) Geben Sie eine Struktur \mathcal{A} mit der Trägermenge $A = \{1, 2\}$ an, für die $\mathcal{A} \models F$ gilt.

Lösung:

$$\begin{aligned}
a^{\mathcal{A}} &= 1 \\
h^{\mathcal{A}}(x) &= 1 && \forall x \in A \\
g^{\mathcal{A}}(x, y) &= 1 && \forall x, y \in A \\
k^{\mathcal{A}}(x, y) &= 1 && \forall x, y \in A \\
P^{\mathcal{A}} &= A \times A \\
Q^{\mathcal{A}} &= \emptyset
\end{aligned}$$

(d) Geben Sie eine zu \mathcal{A} zugeordnete Herbrand-Struktur (H-Struktur) A^* an.

Lösung:

$$A^* = \{P(a, a), \neg Q(a, a), P(h(a), a), \neg Q(h(a), a), P(g(a, a), a), \neg Q(g(a, a), a), \dots\}$$

Aufgabe 2:

Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus auf die Literalmenge

$$\mathcal{L} = \{P(f(x), w, f(a)), P(f(w), w, f(z)), P(f(g(z)), x, y)\}$$

an.

Lösung:

	$P(f(x), w, f(a)) \leftrightarrow P(f(w), w, f(z))$	{ }
$P = P \Rightarrow$	$[f(x), w, f(a)] \leftrightarrow [f(w), w, f(z)]$	{ }
$List(1) \Rightarrow$	$f(x) \leftrightarrow f(w) =_{var} \top$	{ }
$List(2) \Rightarrow$	$w \leftrightarrow w = \top(var)$	{ }
$List(3) \Rightarrow$	$f(a) \leftrightarrow f(z) = \top(var)$	{ $z \leftarrow a$ }
	$P(f(x), w, f(a)) \leftrightarrow P(f(g(z)), x, y)$	{ $z \leftarrow a$ }
$P = P \Rightarrow$	$[f(x), w, f(a)] \leftrightarrow [f(g(z)), x, y]$	{ $z \leftarrow a$ }
$List(1) \Rightarrow$	$f(x) \leftrightarrow f(g(z))$	{ $z \leftarrow a$ }
$f = f \Rightarrow$	$x \leftrightarrow g(z) =_{var} g(a)$	{ $z \leftarrow a, x \leftarrow g(a)$ }
$List(2) \Rightarrow$	$w \leftrightarrow x =_{var} g(a)$	{ $z \leftarrow a, x \leftarrow g(a), w \leftarrow g(a)$ }
$List(3) \Rightarrow$	$f(a) \leftrightarrow y =_{var} \top$	{ $z \leftarrow a, x \leftarrow g(a), w \leftarrow g(a), y \leftarrow f(a)$ }

Somit ist das unifizierende Literal:

$$P(f(g(a)), g(a), f(a))$$

Aufgabe 3:

Auf seiner Reise durch Transsylvanien findet Inspektor Craig Folgendes über die Bewohner heraus:

- 1) Ein Bewohner Transsylvaniens ist wahnsinnig, wenn alle seine Kinder Vampire sind.
 - 2) Alle Mondsüchtigen sind Vampire.
 - 3) Ist ein Bewohner Transsylvaniens nicht mondsüchtig, so auch keiner seiner Elternteile.
- (a) Drücken Sie obige Tatsachen als prädikatenlogische Formeln aus.

Lösung:

Wir verwenden die folgenden Prädikate:

$W(x)$: x ist wahnsinnig.
 $M(x)$: x ist mondsüchtig.
 $V(x)$: x ist ein Vampir.
 $E(x, y)$: x ist ein Elternteil von y .

$$\Phi_1 = \forall x. (\forall y. E(x, y) \rightarrow V(y)) \rightarrow W(x)$$

$$\Phi_2 = \forall x. M(x) \rightarrow V(x)$$

$$\Phi_3 = \forall x. \neg M(x) \rightarrow (\forall y. E(y, x) \rightarrow \neg M(y))$$

- (b) Folgern Sie mittels prädikatenlogischer Resolution, dass alle Mondsüchtigen wahnsinnig sind.

Lösung:

Anfrage:

$$F = \forall x. M(x) \rightarrow W(x)$$

Zunächst werden alle Formeln in Skolem-Normalform umgewandelt.

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \forall x. (\forall y. E(x, y) \rightarrow V(y)) \rightarrow W(x) \\
&\equiv \forall x. \neg(\forall y. \neg E(x, y) \vee V(y)) \vee W(x) \\
&\equiv \forall x. (\exists y. \neg(\neg E(x, y) \vee V(y))) \vee W(x) \\
&\equiv \forall x. (\exists y. E(x, y) \wedge \neg V(y)) \vee W(x) \\
&\equiv \forall x. \exists y. (E(x, y) \wedge \neg V(y)) \vee W(x) \\
&\equiv \forall x. \exists y. (E(x, y) \vee W(x)) \wedge (\neg V(y) \vee W(x)) \\
SNF(\Phi_1) &= \forall x. (E(x, f(x)) \vee W(x)) \wedge (\neg V(f(x)) \vee W(x)) \\
&= \{\{E(x, f(x)), W(x)\}, \{\neg V(f(x)), W(x)\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_2 &= \forall x. M(x) \rightarrow V(x) \\
&\equiv \forall x. \neg M(x) \vee V(x) \\
SNF(\Phi_2) &= \{\{\neg M(x), V(x)\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_3 &= \forall x. \neg M(x) \rightarrow (\forall y. E(y, x) \rightarrow \neg M(y)) \\
&\equiv \forall x. M(x) \vee (\forall y. \neg E(y, x) \vee \neg M(y)) \\
&\equiv \forall x. \forall y. M(x) \vee \neg E(y, x) \vee \neg M(y) \\
SNF(\Phi_3) &= \{\{M(x), \neg E(y, x), \neg M(y)\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\neg F &= \neg(\forall x. M(x) \rightarrow W(x)) \\
&\equiv \neg(\forall x. \neg M(x) \vee W(x)) \\
&\equiv \exists x. \neg(\neg M(x) \vee W(x)) \\
&\equiv \exists x. M(x) \wedge \neg W(x) \\
SNF(\neg F) &= M(c) \wedge \neg W(c) \\
&= \{M(c), \neg W(c)\}
\end{aligned}$$

Ein Resolutionsbeweis ist in Abbildung 1 auf Seite 5 angegeben.

Literatur

- [1] Martin Kreuzer and Stefan Kühling. *Logik für Informatiker*. Pearson Studium, 2006.

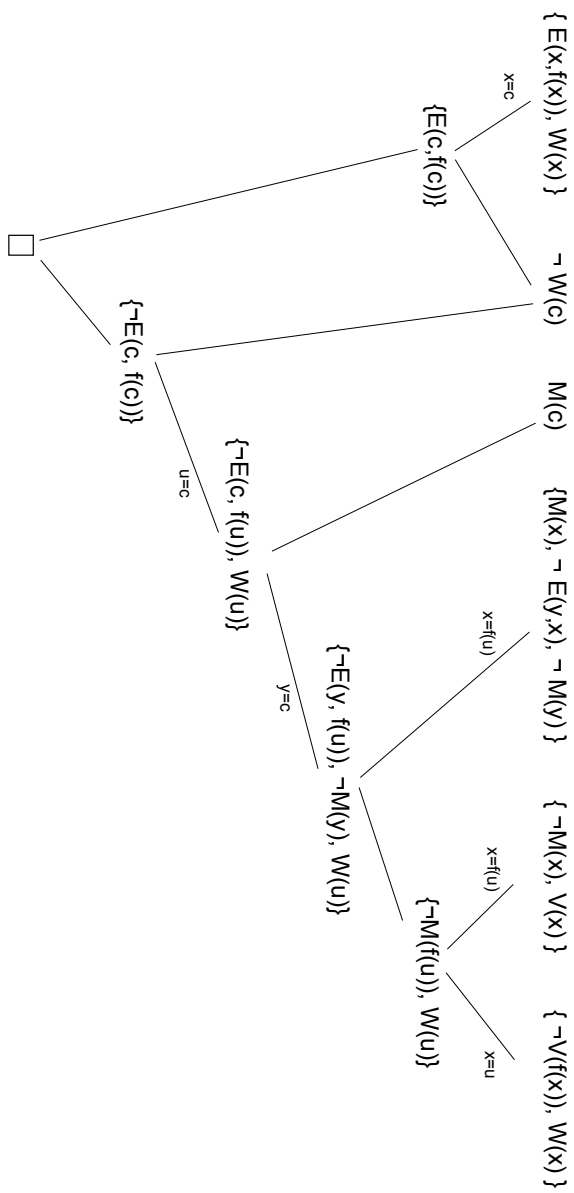


Abbildung 1: Resolutionsbeweis zu Aufgabe 2