Ludwig-Maximilians-Universität München WS 2003/2004
Institut für Informatik Kurztest 1
Prof. Dr. F. Kröger, Dr. D. Pattinson

Temporale Logik und Zustandssysteme

Aufgabe 1 **Allgemeingültige Formeln** (4 Punkte)

Sei K temporale Struktur und $i \in \mathbb{N}_0$ beliebig.

Gruppe A Wir zeigen, dass $\Box A \to (\Diamond B \to \Diamond(A \wedge B))$ allgemeingültig ist. Gelte also $\mathsf{K}_i(\Box A) = \mathsf{K}_i(\Diamond B) = \mathsf{tt}$, zu zeigen ist $\mathsf{K}_i(\Diamond(A \wedge B)) = \mathsf{tt}$.

Da $\mathsf{K}_i(\Diamond B) = \mathsf{tt}$, gibt es $j \geq i$ mit $\mathsf{K}_j(B) = \mathsf{tt}$. Wegen $\mathsf{K}_i(\Box A) = \mathsf{tt}$ gilt auch $\mathsf{K}_j(A) = \mathsf{tt}$. Insgesamlt also $\mathsf{K}_j(A \wedge B) = \mathsf{tt}$, und somit, da $j \geq i$, auch $\mathsf{K}_i(\Diamond(A \wedge B)) = \mathsf{tt}$.

Gruppe B Wir zeigen, dass $\Box A \to (\Box B \to \Box(A \wedge B))$ algemeingültig ist. Gelte also $\mathsf{K}_i(\Box A) = \mathsf{K}_i(\Box B) = \mathsf{tt}$. Zu zeigen ist $\mathsf{K}_i(\Box(A \wedge B)) = \mathsf{tt}$. Sei dazu $j \geq i$ beliebig. Wegen $\mathsf{K}_i(\Box A) = \mathsf{tt}$ folgt $\mathsf{K}_j(A) = \mathsf{tt}$, ebenso $\mathsf{K}_j(B) = \mathsf{tt}$, da $\mathsf{K}_i(\Box B) = \mathsf{tt}$. Insgesamt also $\mathsf{K}_j(A \wedge B) = \mathsf{tt}$, und damit, da $j \geq i$ beliebig war, $\mathsf{K}_i(\Box(A \wedge B)) = \mathsf{tt}$.

Aufgabe 2 **Herleitung Dualer Formeln** (5 Punkte)

Gruppe A Wir erhalten folgende Herleitung von $A \to B, \circ B \to B \vdash \Diamond A \to B$:

(1)	$\circ B \to B$	(Ann.)
(2)	$\neg B \to \neg\circ B$	(prop)(1)
(3)	$\neg\circ B \leftrightarrow \circ\neg B$	(ltl1)
(4)	$\neg B \to \circ\neg B$	(prop)(2)(3)
(5)	$A \to B$	(Ann.)
(6)	$\neg B \to \neg A$	(prop)(5)
(7)	$\neg B \to \Box\neg A$	(ind)(4)(6)
(8)	$\neg\Box\neg A \to \neg\neg B$	(prop)(7)
(9)	$\Diamond \to B$	(prop)(8)

Selbsverständlich können die letzten beiden Schritte auch zu einem einzigen kombiniert werden.

Gruppe B Wir erhalten folgende Herleitung von $A \to B, \circ A \to A \vdash \Diamond A \to B$:

(1)	$\circ A \to A$	(Ann.)
(2)	$\neg A \to \neg\circ A$	(prop)(1)
(3)	$\neg\circ A \leftrightarrow \circ\neg A$	(ltl1)
(4)	$\neg A \to \circ\neg A$	(prop)(2)(3)
(5)	$A \to B$	(Ann.)
(6)	$\neg B \to \neg A$	(prop)(5)
(7)	$\neg B \to \Box\neg A$	(ind)(4)(6)
(8)	$\neg\Box\neg A \to \neg\neg B$	(prop)(7)
(9)	$\Diamond \to B$	(prop)(8)

Wie oben können auch hier die Zeilen (8) und (9) kombiniert werden.

Aufgabe 3 **Abschwächung unter $\Box$** (3 Punkte)

Gruppe A Wir erhalten folgende Herleitung der Formel $\Box(A \wedge B) \to \Box A$:

(1)	$\Box(A \wedge B) \to A \wedge B \wedge \circ\Box(A \wedge B)$	(ltl3)
(2)	$\Box(A \wedge B) \to \circ\Box(A \wedge B)$	(prop)(1)
(3)	$\Box(A \wedge B) \to A$	(prop)(1)
(4)	$\Box(A \wedge B) \to \Box A$	(ind)(2)(3)

Gruppe B Analog erhalten wir für $\Box(A \wedge B) \to \Box B$:

(1)	$\Box(A \wedge B) \to A \wedge B \wedge \circ\Box(A \wedge B)$	(ltl3)
(2)	$\Box(A \wedge B) \to \circ\Box(A \wedge B)$	(prop)(1)
(3)	$\Box(A \wedge B) \to B$	(prop)(1)
(4)	$\Box(A \wedge B) \to \Box B$	(ind)(2)(3)

Aufgabe 4 **While-Operator** (5 Punkte)

Man sieht leicht, dass A **while** B äquivalent zu A **unl** $\neg B$ ist, wobei **unl** der reflexive **unless**-Operator von Aufgabe 6-2 ist.

Damit folgt aus 6-2, dass A **while** $B \leftrightarrow \neg B \vee (A \wedge A$ **unless** $\neg B)$ allgemeingültig ist, also auch die Formel A **while** $B \leftrightarrow B \to (A \wedge A$ **unless** $\neg B)$.

Gruppe A Also folgt vermöge aussagenlogischem Schließen sofort die behauptete Allgemeingültigkeit von A **while** $B \to (B \to A$ **unless** $\neg B)$.

Gruppe B Also folgt vermöge aussagenlogischem Schließen sofort die behauptete Allgemeingültigkeit von $(B \to A$ **unless** $\neg B) \to A$ **while** B.

Alternativ auch durch dirketes Rechnen wie folgt: Sei K temporale Struktur und $i \in \mathbb{N}_0$ beliebig.

Gruppe A Gelte $\mathsf{K}_i(A$ **while** $B) = \mathsf{tt}$ und $\mathsf{K}_i(B) = \mathsf{tt}$. Wir zeigen $\mathsf{K}_i(A$ **unless** $\neg B) = \mathsf{tt}$. Da $\mathsf{K}_i(A$ **while** $B) = \mathsf{tt}$, liegt einer der folgenden Fälle vor:

Fall 1: $\mathsf{K}_k(A) = \mathsf{tt}$ für alle $k \geq i$. Dann gilt auch $\mathsf{K}_k(A) = \mathsf{tt}$ für alle $k > i$ und somit $\mathsf{K}_i(A$ **unless** $\neg B) = \mathsf{tt}>$

Fall 2: Es gibt $j \geq i$ mit $\mathsf{K}_j(B) = \mathsf{ff}$ und $\mathsf{K}_k(A) = \mathsf{tt}$ für alle $i \leq k < j$. Da $\mathsf{K}_i(B) = \mathsf{tt}$ folgt sofort $j > i$, und $\mathsf{K}_j(\neg B) = \mathsf{tt}$. Da $\mathsf{K}_k(A) = \mathsf{tt}$ für alle $i < k < j$ folgt insgesamt $\mathsf{K}_i(A$ **unless** $\neg B) = \mathsf{tt}$.

Gruppe B Gelte $\mathsf{K}_i(B \to A \wedge$ **unless** $\neg B) = \mathsf{tt}$. Wir zeigen $\mathsf{K}_i(A$ **while** $B) = \mathsf{tt}$. Im Falle $\mathsf{K}_i(B) = \mathsf{ff}$ folgt die Behauptung sofort. Wir können also $\mathsf{K}_i(B) = \mathsf{tt}$ annehmen; damit gilt auch $\mathsf{K}_i(A \wedge A$ **unless** $\neg B) = \mathsf{tt}$ nach Annahme, also $\mathsf{K}_i(A) = \mathsf{tt}$ und $\mathsf{K}_i(A$ **unless** $\neg B) = \mathsf{tt}$. Es liegt einer der folgenden Fälle vor:

Fall 1: $\mathsf{K}_k(A) = \mathsf{tt}$ für alle $k > i$. Da $\mathsf{K}_i(A) = \mathsf{tt}$ folgt $\mathsf{K}_k(A) = \mathsf{tt}$ für alle $k \geq i$, somit $\mathsf{K}_i(A$ **while** $B) = \mathsf{tt}$.

Fall 2: Es gibt $j > i$ mit $\mathsf{K}_j(\neg B) = \mathsf{tt}$ und $\mathsf{K}_k(A) = \mathsf{tt}$ für alle $i < k < j$. Da $\mathsf{K}_i(A) = \mathsf{tt}$ nach Annmahme folgt also $\mathsf{K}_j(B) = \mathsf{ff}$ und $\mathsf{K}_k(A) = \mathsf{tt}$ für alle $i \leq k < j$, somit $\mathsf{K}_i(A$ **while** $B) = \mathsf{tt}$.

Aufgabe 5 **Past-Operatoren** (3 Punkte)

Gruppe A Die Formel $\boxminus(A \vee B) \to (\boxminus A \vee \boxminus B)$ ist *nicht* allgemeingültig. Betrachte z.B. die wie folgt gegebene temporale Struktur K, mit "$\sim$" für "beliebig":

i	0	1	2...
A	tt	ff	$\sim$
B	ff	tt	$\sim$

Hier gilt $\mathsf{K}_1(\boxminus(A \vee B)) = \mathsf{tt}$, aber weder $\mathsf{K}_1(\boxminus A) = \mathsf{tt}$ noch $\mathsf{K}_1(\boxminus B) = \mathsf{tt}$.

Gruppe B Die Formel $(\diamondminus A \wedge \diamondminus B) \to \diamondminus(A \wedge B)$ ist *nicht* allgemeingültig. Betrachte z.B. die wie folgt gegebene temporale Struktur K, mit "$\sim$" für "beliebig":

i	0	1	2...
A	tt	ff	$\sim$
B	ff	tt	$\sim$

Hier gilt $\mathsf{K}_1(\diamondminus A) = \mathsf{tt}$ sowie $\mathsf{K}_1(\diamondminus B) = \mathsf{tt}$, aber nicht $\mathsf{K}_1(\diamondminus(A \wedge B)) = \mathsf{tt}$.