Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kröger, Dr. D. Pattinson

WS 2003/2004
Kurztest 2

Temporale Logik und Zustandssysteme

Aufgabe B-1 **Allgemeingültige Formeln** (3 + 3 Punkte)

Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\Box(\exists x A \rightarrow B) \land \Diamond \forall x A \rightarrow \Diamond B$

b) $\Box\Diamond\exists x A \rightarrow \exists x \Box\Diamond A$

Aufgabe B-2 **Erzeuger/Verbraucher in Temporaler Logik** 2 + 4 + 2 + 2 + 4 Punkte

Wir betrachten das markierte Transitionssystem (X, V, S, T, Act) über der Signatur der natürlichen Zahlen, das eine Instanz des Erzeuger-Verbraucher Problems modelliert. Das Transitionssystem ist wie folgt gegeben:

$$X = \{a\} \qquad V = \{\mathrm{p}, \mathrm{c}\} \qquad Act = \{\mathrm{p}, \mathrm{c}\}$$
$$S = \{\eta : X \cup V \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \mathrm{B} \mid \eta(a) \in \mathbb{N}_0, \eta(\mathrm{p}), \eta(\mathrm{c}) \in \mathrm{B}, \text{ entweder } \eta(\mathrm{p}) = \mathsf{tt} \text{ oder } \eta(\mathrm{c}) = \mathsf{tt} \text{ und } a > 0\}.$$

Insbesondere gilt $\eta(\mathrm{p}) = \mathsf{tt}$ oder $\eta(\mathrm{c}) = \mathsf{tt}$, aber nicht beides für jeden Systemzustand $\eta \in S$. Die Zustandsübergangsrelation T ist definiert durch $(\eta, \eta') \in T$, falls

1. $\eta(a) > 1, \eta(\mathrm{c}) = \mathsf{tt}, \eta'(a) = \eta(a) - 1$, oder
2. $\eta(a) = 1, \eta(\mathrm{c}) = \mathsf{tt}, \eta'(a) = 0, \eta'(\mathrm{c}) = \mathsf{ff}$, oder
3. $\eta(\mathrm{p}) = \mathsf{tt}, \eta'(a) = \eta(a) + 1$.

Die Variable a zählt hierbei die Anzahl der Objekte, die erzeugt worden sind. Mit der Aktion „p“ wird ein Objekt erzeugt (a wird erhöht), und mit „c“ wird ein Objekt verbraucht. Dies ist nur möglich, wenn mindestens ein Objekt vorliegt ($a > 0$).

a) Beschreiben Sie das Verhalten des Systems mittels einer Menge $\mathcal{F}$ von temporallogischen Formeln.

b) Zeigen Sie $\mathcal{F} \vdash a = n \rightarrow a > n \,\mathbf{unl}\, \mathrm{exec}_{\mathrm{c}}$ durch Angabe einer Herleitung (a ist eine Variable). Die temporallogischen Gesetze (T1) - (T59), (prop), (pred) sowie die abgeleitete Regel

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{unl}_\Gamma) & \mathrm{exec}\lambda \land A \rightarrow C \lor \circ(B \land \circ A) \quad \text{für alle } \lambda \in Act \\ & \mathrm{nil}_\Gamma \land A \rightarrow B \lor C \\ & \vdash A \rightarrow B \,\mathbf{unl}\, C \end{array}$$

dürfen hierbei verwendet werden.

Wir setzen nun $\mathrm{enabled}_{\mathrm{c}} \equiv a > 1$ und $\mathrm{enabled}_{\mathrm{p}} = \mathsf{tt}$.

c) Geben Sie einen fairen und einen nicht fairen Ablauf des obigen lSTS an.

d) Formulieren Sie die Eigenschaft

„Es ist unendlich oft der Fall, dass die Anzahl der erzeugten Objekte mit einem Transitionsschritt abnimmt“

als temporallogische Formel F.

e) Zeigen Sie, dass F unter Annahme der Fairness herleitbar ist, d.h. $\mathcal{F} \cup \{(\mathrm{fair})\} \vdash F$. Die temporallogischen Gesetzte (T1) - (T59), (prop), (pred) dürfen in der Herleitung verwendet werden.