Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kröger, Dr. D. Pattinson

WS 2003/2004
Kurztest 2

Temporale Logik und Zustandssysteme

Aufgabe 1 **Allgemeingültige Formeln** (3 + 3 Punkte)

Vorbemerkung: Für eine beliebige Formel A ist die Implikation $\forall xA \to \exists xA$ allgemeingültig, da Sorten durch nichtleere Mengen interpretiert werden. Da im Folgenden nur eine Variablenbelegung ζ betrachtet wird, kürzen wir $\mathsf{K}_i^{(\zeta)}$ zu K_i ab.

Gruppe A

a) $\Box(\exists xA \to B) \wedge \Box\forall xA \to \Box B$ ist allgemeingültig. Sei dazu $\mathsf{K} = (\mathsf{S}, \mathsf{W})$ eine temporale Struktur und $i \in \mathbb{N}_0$ beliebig, und gelte $\mathsf{K}_i(\exists xA \to B) = \mathsf{K}_i^(\Box\forall xA) = \textbf{true}$. Zu zeigen ist $\mathsf{K}_i^(\Box B) = \mathsf{tt}$. Sei also $j \geq i$. Dann gilt $\mathsf{K}_j^(\exists A \to B) = \mathsf{tt}$ und $\mathsf{K}_j^{(\zeta)}(\forall xA) = \textbf{true}$. Also nach der Vorbemerkung auch $\mathsf{K}_j(\exists xA)$, und somit $\mathsf{K}_j(B) = \mathsf{tt}$.

b) $\Diamond\Box\exists xA \to \exists x\Diamond\Box A$ is nicht allemeingültig. Sei zum Beispiel $A \equiv x = a$ und $\mathsf{K} = (\mathsf{S}, \mathsf{W})$ mit $\mathsf{W} = (\eta_0, \eta_1, \dots)$ und $\eta_i(a) = i$. gemeingütlig. Dann gilt $\mathsf{K}_i(\exists xA) = \mathsf{tt}$, also auch $\mathsf{K}_i(\Diamond\Box\exists xA) = \mathsf{tt}$. Aber $\mathsf{K}_0(\exists x\Diamond\Box A) = \mathsf{ff}$, denn ansonsten gäbe es $x \in \mathbb{N}_0$ und $i \geq 0$ so dass $\mathsf{K}_j(A) = \mathsf{K}_j(x = j) = \mathsf{tt}$ für alle $j \geq i$, Widerspruch.

Gruppe B

a) $\Box(\exists xA \to B) \wedge \Diamond\forall xA \to \Diamond B$ ist allgemeingültig. Sei dazu $\mathsf{K} = (\mathsf{S}, \mathsf{W})$ temporale Struktur, $i \in \mathbb{N}_0$ beliebig und gelte $\mathsf{K}_i(\Box(\exists A \to B) = \mathsf{K}_i(\Diamond\forall xA) = \mathsf{tt}$. Zu zeigen ist $\mathsf{K}_i(\Diamond B) = \mathsf{tt}$. Da $\mathsf{K}_i(\Diamond\forall xA) = \mathsf{tt}$, gibt es $j \geq i$ mit $\mathsf{K}_j(\forall xA) = \mathsf{tt}$. Nach der Vorbermerkung also auch $\mathsf{K}_j(\exists xA) = \mathsf{tt}$. Aus $\mathsf{K}_i(\Box(\exists xA \to B) = \mathsf{tt}$ folgt $\mathsf{K}_j(\exists xA \to B) = \mathsf{tt}$, also insgesamt $\mathsf{K}_j(B) = \mathsf{tt}$.

b) $\Box\Diamond\exists xA \to \exists x\Box\Diamond A$ ist nicht allgemeingültig. Sei zum Beispiel $A \equiv x = a$ und $\mathsf{K} = (\mathsf{S}, \mathsf{W})$ mit $\mathsf{W} = (\eta_0, \eta_1, \dots)$ und $\eta_i(a) = i$. Dann gilt $\mathsf{K}_j(\exists xA) = \mathsf{tt}$ für alle j, also auch $\mathsf{K}_i(\Box\Diamond\exists xA) = \mathsf{tt}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Aber $\mathsf{K}_0(\exists x\Box\Diamond A) = \textbf{false}$, denn sonst gäbe es $x \in \mathbb{N}_0$ so dass $\mathsf{K}_j(A) = \mathsf{K}_j(x = j) = \mathsf{tt}$ für unendlich viele $j \geq 0$, Widerspruch.

Aufgabe 2 **Erzeuger/Verbraucher in Temporaler Logik**

Vorbermerkung: Gruppe A und B unterscheiden sich nut durch die Namen der Variablen. Die in der Lösung verwendeten Namen beziehen sich auf Gruppe A.

a) Wir beschreiben das System durch die folgende Menge $\mathcal{F}$ von temporalen Formeln:

(excl) $\mathrm{exec_e} \vee (\mathrm{exec_v} \wedge z > 0) \wedge \neg(\mathrm{exec_e} \wedge \mathrm{exec_v} \wedge z > 0)$ (es kann immer nur eine Aktion ausgeführt werden).

(v1) $\mathrm{exec}\lambda_\mathrm{v} \wedge z > 1 \to z' + 1 = z$

(v2) $\mathrm{exec}\lambda_\mathrm{v} \wedge z = 1 \to z' = 0 \wedge \neg\bigcirc\mathrm{exec}\lambda_v$

(e) $\mathrm{exec}\lambda_\mathrm{e} \to z' = z + 1$

b) Wir verwenden die angegebene Regel und erhalten folgende Herleitung:

(1)	$\text{exec}_\text{v} \to \text{exec}_\text{v}$	(prop)
(2)	$\text{exec}_\text{v} \wedge z \geq n \to \text{exec}_\text{v} \vee (z \geq n \wedge \bigcirc(z \geq n)$	(prop)(2)
(3)	$\text{exec}_\text{e} \wedge z \geq n \to z' \geq n$	(pred)(z)
(4)	$\text{exec}_\text{e} \wedge z \geq n \to \text{exec}_\text{v} \vee (z \geq n \wedge \bigcirc(z \geq n))$	(pred)(3)
(5)	$\neg\text{nil}$	(excl)
(6)	$\text{nil} \wedge z \geq n \to z > n \vee z = n$	(prop)(5)
(7)	$z \geq n \to z > n\, \mathbf{unl}\, \text{exec}_\text{v}$	(unl)(3)(5)(6)
(8)	$z = n \to z \geq n$	(data)
(9)	$z = n \to z > n\, \mathbf{unl}\, \text{exec}_\text{v}$	(prop)(7)(8)

c) Ein fairere Ablauf ist $(\eta_0, \eta_1, \eta_0, \eta_1, \dots)$, wobei

- $\eta_0(z) = 0, \eta_0(\text{e}) = \mathsf{tt}, \eta_0(\text{v}) = \mathsf{ff}$
- $\eta_1(z) = 1, \eta_1(\text{e}) = \mathsf{ff}, \eta_1(\text{v}) = \mathsf{tt}.$

Hier werden alle Aktionen unendlich oft ausgeführt.

Ein nicht fairer Ablauf ist $(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots)$, wobei

- $\eta_i(z) = i, \eta_i(\text{e}) = \mathsf{tt}, \eta_i(\text{v}) = \mathsf{ff}.$

Hier kommt der Verbraucher nicht zu Zuge.

d) Wir setzten $F \equiv \Box\Diamond z' < z$.

e) Wir müssen nur zeigen, dass exec_v unendlich oft ausgeführt wird, da aus exec_v bereits $z' < z$ folgt. Dies bewerkstelligen wir mit der Regel (fair). Die Herleitung ist wie folgt:

(1)	$z = 0 \to \text{exec}\lambda_\text{e}$	(excl)
(2)	$z = 0 \to z' > 0$	(pred)(e)(1)
(3)	$z = 0 \to \Diamond z > 0$	(T7)(pred)(2)
(4)	$z > 0 \to \Diamond z > 0$	(prop)
(5)	$z = 0 \vee z > 0$	(data)
(6)	$\Diamond z > 0$	(prop)(3)(4)(5)
(7)	$\Box\Diamond\text{enabled}_\text{v}$	(alw)(6)
(8)	$\Diamond\text{exec}_\text{v}$	(alw)(7)
(9)	$\text{exec}_\text{v} \to z' < z$	(v)
(10)	$\Diamond\text{exec}_\text{v} \to \Diamond z' < z$	(T31)(9)
(11)	$\Diamond z' < z$	(mp)(8)(10)
(12)	$\Box\Diamond z' < z$	(alw)(11)